

Matemática para o ensino do conceito de polinômios a partir de recontextualizações em livros didáticos

Mathematics for teaching the concept of polynomials from recontextualizations in textbooks

Matemáticas para la enseñanza del concepto de polinomios a partir de recontextualizaciones en libros de texto

Mathématiques pour l'enseignement du concept de polynômes à partir de recontextualisations dans les manuels scolaires

Alana Santiago Oliveira¹
Secretaria de Educação do Estado da Bahia (SEC-BA)
Mestrado em Educação
<https://orcid.org/0000-0003-4556-0565>

Jaqueleine de Souza Pereira Grilo²
Universidade Estadual de Feira de Santana (UEFS)
Doutorado em Educação
<https://orcid.org/0000-0002-0408-047X>

Resumo

A pesquisa foi desenvolvida com o objetivo de sistematizar uma Matemática para o Ensino do conceito de Polinômios a partir de realizações presentes em livros didáticos. Para isso, tivemos a teoria bernsteiniana e o Estudo do Conceito como fundamentações teóricas e metodológicas. Os resultados obtidos com a análise do conceito de Polinômios em dez livros didáticos, apontam para uma variabilidade de *realizações*, agrupadas em seis *panoramas*, a saber: generalização, situações problemas, estrutura algébrica, geométrico, materiais manipuláveis e ilustrativo. Esses panoramas apontam que tal conceito tende a manter um fraco grau de isolamento entre o conceito de Polinômios e outros conceitos matemáticos, bem como com conceitos fora da Matemática, revelando o estabelecimento de *vínculos* entre eles. Além disso, identificamos que as realizações reconhecidas nos panoramas generalização, estrutura algébrica e geométrico, estabelecem *combinações* com a Álgebra Abstrata e permitem interpretações mais profundas.

Palavras-chave: Ensino, Polinômios, Educação básica.

¹ alanasantiaogoliveira@hotmail.com

² ispgrilo@uefs.br

Abstract

The research was developed with the objective of systematizing Mathematics for Teaching the concept of Polynomials based on achievements present in textbooks. For this, we had Bernsteinian theory and the Study of the Concept as theoretical and methodological foundations. The results obtained from the analysis of the concept of Polynomials in ten textbooks point to a variability of achievements, grouped into six panoramas, namely: generalization, problem situations, algebraic structure, geometric, manipulable materials and illustrative. These panoramas indicate that this concept tends to maintain a weak degree of isolation between the concept of Polynomials and other mathematical concepts, as well as with concepts outside Mathematics, revealing the establishment of links between them. Furthermore, we identified that the achievements recognized in the generalization, algebraic structure and geometric panoramas, establish combinations with Abstract Algebra and allow deeper interpretations.

Keywords: Teaching, Polynomials, Basic education.

Resumen

La investigación se desarrolló con el objetivo de sistematizar la Matemática para la Enseñanza del concepto de Polinomios a partir de logros presentes en los libros de texto. Para ello tuvimos como fundamentos teóricos y metodológicos la teoría bernsteiniana y el Estudio del Concepto. Los resultados obtenidos del análisis del concepto de Polinomios en diez libros de texto apuntan a una variabilidad de logros, agrupados en seis panoramas, a saber: generalización, situaciones problemáticas, estructura algebraica, geométrica, materiales manipulables e ilustrativa. Estos panoramas indican que este concepto tiende a mantener un débil grado de aislamiento entre el concepto de Polinomios y otros conceptos matemáticos, así como con conceptos ajenos a las Matemáticas, revelando el establecimiento de vínculos entre ellos. Además, identificamos que los logros reconocidos en la generalización, estructura algebraica y panoramas geométricos, establecen combinaciones con el Álgebra abstracta y permiten interpretaciones más profundas.

Palabras clave: Enseñanza, Polinomios, Educación Básica.

Résumé

La recherche a été développée dans le but de systématiser les mathématiques pour l'enseignement du concept de polynômes sur la base des acquis présents dans les manuels scolaires. Pour cela, nous avions la théorie bersteinienne et l'Etude du Concept comme fondements théoriques et méthodologiques. Les résultats obtenus à partir de l'analyse du

concept de Polynômes dans dix manuels pointent vers une variabilité des acquis, regroupés en six panoramas, à savoir : généralisation, situations-problèmes, structure algébrique, géométrique, matériaux manipulables et illustratif. Ces panoramas indiquent que ce concept tend à maintenir un faible degré d'isolement entre le concept de Polynômes et d'autres concepts mathématiques, ainsi qu'avec des concepts extérieurs aux Mathématiques, révélant l'établissement de liens entre eux. De plus, nous avons identifié que les acquis reconnus dans la généralisation, la structure algébrique et les panoramas géométriques, établissent des combinaisons avec l'algèbre abstraite et permettent des interprétations plus profondes.

Mots-clés : Enseignement, polynômes, Education de base.

Matemática para o ensino do conceito de polinômios a partir de recontextualizações em livros didáticos

Diversos estudos na área de Educação Matemática têm inspirações no clássico Shulman (1987) e debruçam-se sobre as compreensões dos conhecimentos disciplinares e pedagógicos necessários aos professores de Matemática para fins de ensino (Ball et al., 2008; Ribeiro, 2020). Esses autores discutem um aspecto particular do professor, que se diferencia da Matemática praticada em outras áreas, como física, engenharia etc. De acordo com Davis e Renert (2014) essa particularidade do professor, que deve saber utilizar uma Matemática específica para fins de ensino, consiste em uma rede de entendimentos sobre conceitos matemáticos e competências pedagógicas que não são facilmente adquiridas pelos professores. Embora o conhecimento do conteúdo seja indispensável, ensinar Matemática requer aspectos pedagógicos essenciais para que determinados conceitos sejam compreendidos pelos alunos (Menduni-Bortoloti, 2016; Rangel et al., 2015; Santos & Barbosa, 2016).

Sobre a Matemática específica que professores devem saber para fins de ensino, os autores Adler (2005), Davis e Simmt (2006) e Davis e Renert (2014) discutem em termos de *Mathematics for Teaching* (M4T), que traduzimos como Matemática para o Ensino. A nossa compreensão sobre M4T decorre da nossa acepção teórica bernsteiniana que será melhor apresentada na próxima seção.

Na perspectiva da M4T, diversos autores desenvolveram seus estudos interessados em investigar como professores comunicam determinados conceitos matemáticos (Campos, 2021; Coutinho, 2015; Gomez, 2016; Menduni-Bortoloti, 2016; Santos, 2017). Assim como Davis e Renert (2014), consideramos que para fins de ensino, um conceito matemático pode ser entendido como um agrupamento das formas de comunicá-lo, podendo ser definições formais, aplicações, desenhos, metáforas, entre outras. Além disso, compreendemos que o conhecimento efetivo para o ensino “é muito mais do que um conjunto de conceitos prontamente catalogado ou testado objetivamente” (Davis & Renert, 2014, p.3 – tradução nossa).

Tendo em vista que a comunicação matemática nos contextos de ensino acontece a partir de conceitos matemáticos específicos, o conceito escolhido para ser investigado foi o de Polinômios. A justificativa para a escolha de tal conceito habita no fato dele ter sido excluído do rol de conteúdos do Ensino Médio após a aprovação da Base Nacional Comum Curricular (BNCC) e ter ficado restrito ao Ensino Fundamental, etapa na qual se inicia formalmente o contato com a linguagem algébrica e a estruturação do pensamento algébrico (Brasil, 2017). A nossa intenção é identificar as realizações do conceito propostas para esta etapa da Educação Básica para cumprir com o objetivo da pesquisa: sistematizar uma Matemática para o Ensino

do conceito de Polinômios a partir de realizações presentes em livros didáticos. Aqui compreendemos as realizações como os diferentes modos que podem ser utilizados para comunicar um conceito: uma definição formal, aplicações, desenhos, metáforas, entre outras.

A escolha pelos livros didáticos apoiou-se no estudo de Macêdo et al. (2019). Os autores afirmam que o trabalho docente ainda ocorre de modo imbricado com a forma como a Matemática aparece nos livros didáticos. Assim, cada livro analisado nos possibilitou ver uma Matemática para o Ensino do conceito de Polinômios. A contribuição desse estudo se dá na sistematização de uma Matemática para o Ensino do conceito de Polinômios que encontra-se dispersa em diferentes livros didáticos.

Com base em Davis e Renert (2014), o conceito de Polinômios é tomado como o agrupamento de diferentes realizações que podem ser utilizadas para comunicar e associar à palavra Polinômios. Por exemplo, a definição formal abaixo, expressa por Hefez e Villela (2012, p. 74), é um exemplo de realização do conceito.

Seja A um anel. Um símbolo x não pertencente ao anel A será chamado uma *indeterminada* sobre A . Utilizaremos um símbolo x^j , para cada número natural $j \geq 0$, e escreveremos $x^0=1$ e $x^1 = x$. Um Polinômio $f(x)$ com coeficientes em A é uma expressão formal do tipo:

$$f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n = \sum_{j=0}^n a_j x^j,$$

onde $n \in N$, $a^j \in A$, para $0 \leq j \leq n$.

Para $0 \leq j \leq n$, os elementos a_j são chamados de coeficientes do Polinômio $f(x)$, as parcelas a_jx^j de termos e os termos a_jx^j tais que $a_j \neq 0$ de monômios de grau j do Polinômio $f(x)$. O coeficiente a_0 é chamado de termo constante.

Historicamente, as realizações dos conceitos algébricos estiveram associadas à generalização da Aritmética. Conforme Eves (2002, p. 546), “no início do século XIX a álgebra era considerada simplesmente como a aritmética simbólica”. Segundo o autor, esse ainda é o modo como a Álgebra é apresentada na escola e, também, nos cursos superiores. Nesse contexto, Moura e Santos (2021) discutem sobre alguns problemas anteriores ao século XVI que buscavam interligar Aritmética, Álgebra e Geometria e citam o livro II d’Os Elementos de Euclides, especificamente sobre as possíveis relações entre Álgebra e Geometria, que “apresenta traços algébricos, sendo conhecida como a ‘álgebra geométrica’ dos gregos” (Moura & Santos, 2021, p. 307).

De acordo com Ibrahim (2015), a compreensão do conceito de Polinômios se torna imprescindível, na medida que possibilita o entendimento de outros conceitos matemáticos relacionados e, consequentemente, possibilita o desenvolvimento de competências algébricas. Estudos apontam também, dificuldades no processo de ensino e aprendizagem de Polinômios que podem estar associadas à forma como esse conceito é abordado nas escolas (Ibrahim &

Resende, 2018; Lauteschlager & Ribeiro, 2017). Outros estudos apresentam sugestões de atividades visando contribuir para o ensino e aprendizagem de Polinômios (Bressan, 2021; Coutinho, 2019; Massarioli, 2022; Pereira, 2020; Silva, 2021), além de propostas voltadas para um estudo mais aprofundado que estabelecem relações com Anéis de Polinômios e como eles poderiam ser trabalhados na Educação Básica (Dias, 2021; Santos, 2021; Sousa, 2020).

A seguir, apresentamos uma breve discussão sobre conceitos da teoria bernsteiniana (2000; 2003), especificamente sobre o conceito de Recontextualização Pedagógica que fundamentará a nossa interpretação sobre Matemática para o Ensino.

Percursos da recontextualização pedagógica e a constituição de uma M4T

De acordo com Bernstein (2000; 2003), as práticas pedagógicas não são restritas apenas as relações estabelecidas no contexto escolar, consistem em relações sociais onde acontece a produção e reprodução cultural. Para tratar das diferentes formas de comunicação no âmbito das práticas pedagógicas, Bernstein (2000; 2003) utiliza a palavra texto, como sendo qualquer representação pedagógica, gestual, falada, escrita, visual, que revelam posicionamentos dos sujeitos. Seguindo o sentido expresso, o interesse nesta pesquisa é pelos textos que circulam nas práticas pedagógicas estabelecidas no contexto escolar materializados em livros didáticos que comunicam o conceito de Polinômios.

Para explanar o trajeto de constituição dos textos que são reproduzidos no interior das práticas pedagógicas, Bernstein (2000; 2003) estruturou três campos. O campo de produção, onde ocorre a criação de novas ideias e o desenvolvimento de textos originais e específicos. Grilo, Barbosa e Luna (2016) apontam o Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA) como o principal centro de produção de textos relacionados à Matemática no Brasil. É nesse campo onde ocorre, por exemplo, o desenvolvimento das teorias que compõem a Álgebra Abstrata, ou seja, onde os textos originais sobre o conceito de Polinômios são produzidos.

O campo de recontextualização, onde acontecem as transformações e seleções dos textos originais, classificado em dois tipos: Campo de Recontextualização Oficial (CRO) e Campo de Recontextualização Pedagógica (CRP). Já o campo de Recontextualização Pedagógica é constituído por universidades, faculdades de educação, fundações, escolas, editoras de livros, dentre outros. O Campo de Recontextualização Oficial é representado pelas subagências do Estado e os departamentos especializados, como as secretarias do Ministério da Educação (MEC). Os campos de recontextualização têm como principal objetivo regular e transformar textos do campo de produção em discursos pedagógicos a serem reproduzidos nos

campos de reprodução. No contexto da nossa pesquisa, os livros didáticos apresentam textos recontextualizados sobre Polinômios sob influência dos processos de recontextualização operados pelos campos oficiais e pedagógicos.

O campo de reprodução, por sua vez, é onde ocorre a reprodução de forma seletiva de textos que foram produzidos no nível original de produção e que sofreram transformações nos campos recontextualizadores até a sua comunicação final nesse campo. É comum as pesquisas que tratam de relações pedagógicas desenvolvidas em contextos escolares considerarem esse campo como sendo as salas de aula da Educação Básica (Grilo, Barbosa & Luna, 2016; Lima & Oliveira, 2019; Prado, Oliveira & Barbosa, 2020). Contudo, essa associação das salas de aula ao Campo de Reprodução não significa que nesses contextos, e mesmo fora deles, não haja produção de novos textos (Grilo, Barbosa & Luna, 2017).

Os campos estruturados por Bernstein (2000; 2003) podem possuir significados específicos e comunicações legítimas, de acordo com as fronteiras que são estabelecidas nas relações entre e dentro desses campos. O caráter específico só é criado e conservado quando há um isolamento nessas relações (Bernstein, 2003). Esse isolamento pode ser forte, aumentando as fronteiras e demarcando as especificidades de cada campo, ou fraco, se os textos que circulam no âmbito das práticas pedagógicas revelarem uma maior aproximação, não havendo uma relação limitada ou ausente entre os textos.

O princípio que regula o grau de isolamento, é nomeado por Bernstein (2003) como “classificação”, podendo variar entre forte ou fraco. A classificação refere-se aos modos como os textos podem ser comunicados entre/em campos e a distinção de “que” textos são considerados específicos e legítimos, através das regras de reconhecimento. Se considerarmos os conceitos Polinômios e Funções, uma classificação mais fraca, possibilitará o estabelecimento de conexões e associações entre os textos específicos desses conceitos. Por outro lado, uma classificação mais forte, tende a manter esses textos cada vez mais especializados e sem qualquer relação entre os dois conceitos.

O princípio que regula a comunicação dentro dos campos é nomeado como “enquadramento” e, também, varia entre forte ou fraco. São as regras de realização, que permite o controle de “como” os textos devem ser transmitidos e adquiridos no interior de qualquer prática pedagógica, ao estabelecer critérios de seleção e produção de textos legítimos. Por exemplo, são as regras de realização que determinam que a forma legítima de realizar uma adição de Polinômios consiste em agrupar os termos semelhantes e depois reduzi-los. A análise das regras de reconhecimento e realização, e, consequentemente, os princípios de classificação

e enquadramento, permitem investigar “quais” e “como” os textos são comunicados no interior de qualquer prática pedagógica.

Compreendendo que o livro didático utilizado por professores e alunos, comunicam uma versão dos conceitos matemáticos de forma escrita (Menduni-Bortoloti, 2016), investigá-lo permite a identificação de textos recontextualizados que geralmente os professores utilizam no planejamento e desenvolvimento das aulas, e, consequentemente, na constituição da Matemática para o Ensino. Assim como Davis e Renert (2014), compreendemos a Matemática para o Ensino de um determinado conceito, como um conjunto das diferentes estratégias e formas utilizadas para comunicá-lo. Como fruto de um processo de sucessivas recontextualizações, a M4T não é algo fixo e possível de ser determinada. Na perspectiva de Davis e Renert (2014), ela constitui-se na prática, nas interações e compartilhamentos dos professores com seus pares e alunos, o que se aproxima do entendimento bernsteiniano de recontextualização pedagógica como um movimento de transformações de textos não apenas de ordem instrucional, mas também de ordem moral, visando atender os ordenamentos que regulam a prática pedagógica estabelecida nos contextos escolares.

Segundo Davis e Renert (2014), a Matemática para o Ensino consiste em uma rede de entendimentos sobre conceitos matemáticos e competências que não são facilmente adquiridos pelos professores. Embora o conhecimento do conteúdo seja indispensável, ensinar Matemática requer aspectos pedagógicos essenciais para que determinados conceitos sejam compreendidos pelos alunos (Rangel et al., 2015; Menduni-Bortoloti, 2016; Santos & Barbosa, 2016).

Percorso metodológico

Esse estudo foi desenvolvido segundo as bases da pesquisa qualitativa e, portanto, apresenta uma interpretação sobre o objeto investigado a partir das experiências do pesquisador (Creswell, 2010), sem buscar quantificar as formas de comunicar o conceito de Polinômios nos livros didáticos selecionados. Neste sentido, trata-se de um estudo do tipo documental, que possibilita o acesso do pesquisador a dados em primeira mão, ou seja, dados que ainda não receberam tratamento analítico por outros autores (Gil, 2010).

Como fontes de dados, selecionamos as onze coleções de livros didáticos de Matemática dos anos finais do Ensino Fundamental que foram aprovadas pelo Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) do ano de 2020, como mostra a Tabela 1. O PNLD ocorre a cada três anos e recomenda, após avaliação pedagógica criteriosa, coleções de livros didáticos a serem

escolhidas por professores das escolas para utilização no triênio subsequente, através do Guia Nacional do Livro Didático (GNLD).

Optamos por estas coleções como fontes de dados, visto que até o ano da escrita desse artigo eram as coleções aprovadas e, por isso, poderiam refletir as práticas pedagógicas das quais os professores de Matemática que atuam nos anos finais do Ensino Fundamental participam. Destacamos que não estamos interessados em analisar na íntegra os livros didáticos selecionados, mas sim, especificamente os tópicos sobre Polinômios.

Tabela 1.

Coleções de Livros Didáticos de Matemática aprovadas pelo PNLD 2020 (Brasil, 2019)

Coleção	Autores
A Conquista da Matemática	José Ruy Giovanni Júnior, Benedicto Castrucci
Apoema Matemática	Adilson Longen
Araribá Mais - Matemática	Obra coletiva. Editores Responsáveis: Mara Regina Garcia Gay e Willian Raphael Silva
Convergências Matemática	Eduardo Chavante
Geração Alpha Matemática	Carlos de Oliveira, Felipe Fugita
Matemática Bianchini	Edwaldo Bianchini
Matemática - Compreensão e Prática	Ênio Silveira
Matemática Essencial	Patrícia Moreno Pataro, Rodrigo Balestri
Matemática Realidade & Tecnologia	Joamir Roberto de Souza
Teláris Matemática	Luiz Roberto Dante
Trilhas da Matemática	Fausto Arnaud Sampaio

Cada coleção contém quatro volumes (6º ao 9º ano). A princípio, consultamos os sumários de todos os volumes das coleções para verificar em quais livros o conceito de Polinômios era abordado. Constatamos que na coleção “Apoema – Matemática” o conceito em estudo não apareceu em nenhum dos volumes. Nas coleções “Matemática – Compreensão e Prática” e “Matemática Realidade & Tecnologia”, Polinômios é apresentado no volume quatro, correspondente ao 9º ano. Nas demais coleções selecionadas, este conteúdo é abordado no volume três (8º ano).

Após a identificação dos dez livros didáticos, sendo oito do 8º ano e dois do 9º ano dos anos finais do Ensino Fundamental, que abordam o conceito de Polinômios, fomos as unidades e, especificamente, aos capítulos que tratam do conteúdo para identificarmos as formas como o conceito de Polinômios era comunicado pelos autores e, possivelmente, pelos professores que adotam esses livros em suas salas de aula. De posse dos livros didáticos impressos e alguns em formato digital disponíveis nos sites das próprias editoras, procedemos com a busca de tópicos relacionados ao conceito de Polinômios em todos os exemplares das coleções. Quando

identificados esses tópicos, o exemplar era selecionado para análise minuciosa das páginas a eles correspondentes.

Seguimos na perspectiva da linguagem de descrição definida por Bernstein (2000), que consiste em olharmos para os dados empíricos (linguagem externa) relacionando-os estreitamente com os conceitos teóricos estudados (linguagem interna), e a partir daí, interpretar e produzir textos específicos. Além de conceitos da teoria de Basil Bernstein (2000; 2003), utilizamos a estrutura metodológica do Estudo do Conceito (EC) proposta de Davis e Renert (2014). O EC consiste em uma investigação colaborativa, onde professores podem questionar e elaborar novas formas de comunicar um conceito matemático para fins de ensino. Mesmo o nosso estudo não tendo sido desenvolvido com um grupo de professores *in situ*, consideramos que esta é uma estratégia metodológica adequada haja vista que os livros didáticos foram escritos por um grupo de autores/professores que manifestam formas de comunicar um conceito e a partir delas é possível elaborar novas maneiras de comunicá-lo. Além disso, como Menduni-Bortoloti (2016) e Santos (2017), tais livros podem refletir as práticas pedagógicas das quais os professores participam.

A partir dos resultados de diferentes EC, Davis e Renert (2014) sistematizaram quatro ênfases: *realizations*, *landscapes*, *entailments* e *blends*, que traduzimos como: realizações, panoramas, vínculos e combinações. Para os autores, é através das realizações que os alunos interpretam e dão sentido ao conceito. Segundo Santos e Barbosa (2017, p. 320), “os conceitos existem apenas como atributos de suas realizações, ou seja, são nas realizações e pelas realizações que os conceitos são constituídos”. Os panoramas são frutos dos agrupamentos de realizações semelhantes. Os vínculos estabelecem como as realizações de um determinado são capazes de moldar a compreensão de outros conceitos e as combinações indicam como a partir das realizações de um dado conceito é possível estabelecer conexões mais abrangentes e complexas.

Neste sentido, dado o objetivo do nosso estudo, inicialmente identificamos as *realizações* do conceito de Polinômios e as agrupamos em *panoramas*. Para agrupá-las consideramos os princípios de classificação e enquadramento (Bernstein, 2003) e, consequentemente, as regras de reconhecimento e realização, na medida que reconhecemos quais realizações podiam ser reunidas em cada panorama e como essas realizações são legitimadas diante da variedade de formas textuais recontextualizadas sobre o conceito de Polinômios presentes nos livros didáticos. Além disso, foi possível identificar *vínculos* e *combinações* que foram estabelecidos em observância à força da classificação das realizações do conceito de Polinômios com a compreensão de outros conceitos relacionados.

Apresentação dos dados

Para sistematizarmos uma Matemática para o Ensino do conceito de Polinômios apoiamo-nos nas *realizações* identificadas nos livros didáticos selecionados e as apresentamos em *panoramas*. Foram identificados seis panoramas, a saber: generalização, situações problemas, estrutura algébrica, geométrico, materiais manipuláveis e ilustrativo.

Panorama generalização

O panorama que nomeamos como generalização, agrupa as realizações do conceito de Polinômios reconhecidas como formas de generalizar padrões matemáticos. As realizações vinculadas a esse panorama foram apresentadas essencialmente na abertura dos capítulos e em exercícios propostos. A maioria dos autores sugerem nas orientações aos professores, que seja discutido com os alunos o significado e importância de uma linguagem específica que permita as generalizações na Matemática. A Figura 1 apresenta exemplos das realizações reconhecidas como generalização.

(A)

- Qual é a expressão geral de um número natural (n) par? E de um número natural ímpar?

Fonte: Giovanni e Castrucci (2018c, p. 99)

(B)

4. A sequência $(xy, x^3y^2, x^5y^3, \dots, A)$ tem 6 termos. Descubra o padrão de montagem dessa sequência e escreva o monômio representado por A .

Fonte: Giovanni e Castrucci (2018c, p. 114)

Figura 1.

Exemplos de realizações do panorama generalização

O exemplo (A) trata-se de uma questão que aparece nas orientações didáticas. Os autores sugerem que os professores discutam com os alunos a expressão geral de um número natural par e de um número natural ímpar. O exemplo (B) consiste em uma questão proposta sobre sequência, espera-se que os estudantes determinem o padrão de montagem da sequência finita dada e o monômio que representa o último termo. Vê-se aqui a tentativa de apresentar para estudantes da Educação Básica a Álgebra como uma generalização da Aritmética.

As realizações do conceito reconhecidas no panorama generalização revelam uma fraca classificação entre textos sobre Polinômios e outros conceitos matemáticos, ao estabelecer

vínculos com os conceitos de Números Naturais e Sequências, por exemplo. Em termos de combinações, observamos um fraco grau de isolamento entre os textos desse panorama com a Álgebra Abstrata. Essa tendência a uma fraca classificação se configura no modo como a Álgebra é abordada – como generalização da Aritmética – o que remonta ao princípio do processo de construção da Álgebra.

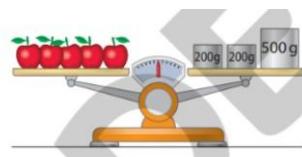
Panorama situações problemas

Estão agrupadas nesse panorama, que designamos como situações problemas, as realizações do conceito de Polinômios reconhecidas como formas de simplificar e representar sentenças matemáticas por meio de expressões algébricas. Os Polinômios aparecem, nesse caso, como uma maneira de moldar problemas e manipular estruturas através da linguagem algébrica com o intuito de sintetizar informações, simplificar a escrita e representar situações problemas através da Álgebra. A Figura 2 contém exemplos das realizações reconhecidas como situações problemas.

O uso de letras para representar números facilita a tradução de sentenças da linguagem verbal escrita para a linguagem algébrica.

(C)

Orlando, dono de uma quitanda, colocou 5 maçãs em um dos pratos de uma balança e nivelou-a colocando no outro prato um bloco de massa medindo 500 g e dois blocos de massa medindo 200 g cada um. Indicando a massa média de cada maçã por x , represente no caderno essa situação por meio de uma equação.
 $1. 5x = 900$



A equação $E = mc^2$ (energia de um sistema é igual à medida de massa multiplicada pelo quadrado da velocidade da luz no vácuo) sintetiza parte da teoria da relatividade de Einstein, considerada um **divisor de águas** entre a Física clássica e a Física moderna. Ela sugere que é possível transformar matéria em energia, e vice-versa. Em explosões nucleares, ocorre a transformação de matéria em energia.

(D)

O cálculo algébrico é a estrada pela qual transitam ideias fundamentais do conhecimento humano.

(E)

As curvas dos desenhos feitos por computação gráfica são representadas analiticamente por polinômios. São elas que dão a ideia de profundidade e de perspectiva.

Divisor de águas: acontecimento, fato ou situação que serve de referência temporal.

Figura 2.

Exemplos de realizações do panorama situações problemas (Bianchini, 2018, p. 93, p.91, Oliveira e Fugita, 2018c, p. 33),

Os exemplos apresentados acima são frutos de discussões apresentadas no início dos capítulos. Nos exemplos (C) e (D) vê-se que os autores tentam convencer os estudantes da importância do estudo das expressões algébricas e, consequentemente, dos Polinômios para a modelagem de problemas matemáticos que podem ser aplicados a diversas áreas. Identificamos, em todos os livros analisados, exercícios que permitem que os estudantes reconheçam que a passagem de expressões escritas na língua materna para a linguagem matemática, via resolução de problemas, consiste em uma realização legítima do conceito de Polinômios.

As realizações do conceito de Polinômios através de situações problemas, identificadas nos livros didáticos, estabelecem vínculos com outros conceitos matemáticos como Equação, Função e Juros e, também, com outras áreas como Economia, Física, Medicina, Criptografia, Computação Gráfica, etc., como se vê em (D) e (E). Sendo assim, realizações desse panorama, revelam uma fraca classificação entre os textos de Polinômios com outros conceitos matemáticos ou não. Já em termos de combinações, observamos que as realizações desse panorama, revelam forte classificação entre os textos sobre Polinômios e a Álgebra Abstrata.

Panorama estrutura algébrica

Compõem esse panorama as realizações do conceito de Polinômios reconhecidas apenas como expressões algébricas compostas por letras, números e símbolos que satisfazem a formalização de um conjunto de elementos com operações e propriedades estruturadas, ou seja, os Polinômios. Em todos os livros, as realizações do tipo estrutura algébrica possuem uma grande predominância. Devido as suas especificidades e por apresentar as sentenças bem sintetizadas, essas realizações aparecem como: polinômio reduzido, grau e valor numérico de um polinômio, igualdade entre polinômios e operações com polinômios. A Figura 3 apresenta três exemplos de realizações reconhecidas como panorama estrutura algébrica.

Dados os polinômios $A = 3x^2 + 2x$ e $B = 2x^2 + x$, vamos indicar a adição por $A + B$ e a diferença por $A - B$. Para calculá-las, eliminamos os parênteses e reduzimos os termos semelhantes.

- $A + B = (3x^2 + 2x) + (2x^2 + x) = 3x^2 + 2x + 2x^2 + x = 5x^2 + 3x$
- $A - B = (3x^2 + 2x) - (2x^2 + x) = 3x^2 + 2x - 2x^2 - x = x^2 + x$

(F)

Para efetuar $A - B$ é preciso atenção especial.

Dividir um polinômio A (dividendo) por outro B (divisor) significa encontrar um polinômio Q , chamado quociente, e um polinômio R , chamado resto, de grau menor que o grau do divisor, de forma que:

$$A = B \cdot Q + R$$

Exemplo

Vamos dividir $(x^3 + 1)$ por $(x + 1)$:

Portanto: $x^3 + 1 : (x + 1) = (x^2 - x + 1)$

(G)

Simplificação de polinômios

É possível simplificar um polinômio que apresenta monômios semelhantes em sua escrita.

Vamos simplificar o polinômio $5x^2y^3 - 4x^2 - 2x^2y^3 + 3x \cdot (x - 2) - 2x^2y^3 + 3 + x^2$.

$$\begin{aligned} 5x^2y^3 - 4x^2 - 2x^2y^3 + 3x \cdot (x - 2) - 2x^2y^3 + 3 + x^2 &= \quad \text{Aplicamos a propriedade distributiva da multiplicação para eliminar os parênteses.} \\ = 5x^2y^3 - 4x^2 - 3x^2 - 6x - 2x^2y^3 + 3 + x^2 &= \\ = 5x^2y^3 - 2x^2y^3 - 4x^2 + 3x^2 + x^2 - 6x + 3 &= \\ = (5 - 2) \cdot x^2y^3 + (-4 + 3 + 1) \cdot x^2 - 6x + 3 &= \quad \text{Organizamos os monômios semelhantes lado a lado e efetuamos as adições e subtrações.} \\ = 3x^2y^3 + 0x^2 - 6x + 3 &= \\ = 3x^2y^3 - 6x + 3 & \end{aligned}$$

O polinômio $3x^2y^3 - 6x + 3$ é um polinômio reduzido.

(H)

Figura 3.

Exemplos de realizações do panorama estrutura algébrica (Dante, 2018c, p.83, Araribá Mais Matemática – obra coletiva, 2018c, p. 202, Pataro e Balestri, 2018c, p. 82)

No exemplo (F), o autor apresenta a manipulação algébrica necessária para realizar as operações de adição e subtração de Polinômios. Em (G), vê-se que são estabelecidas as condições para se efetuar a operação de divisão entre Polinômios recorrendo ao método das chaves. Já no exemplo (H), os autores apresentam de maneira detalhada o passo a passo e as propriedades que devem ser aplicadas para obter o Polinômio na sua forma reduzida.

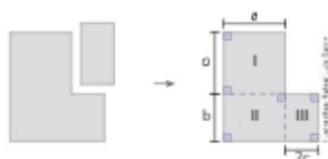
Reconhecemos esses exemplos como panorama estrutura algébrica na medida que consideram procedimentos e técnicas puramente algébricos na manipulação das sentenças matemáticas. O reconhecimento desses modos de comunicar o conceito de Polinômios é bastante requerido em exercícios de todos os livros selecionados, quando os autores sugerem a manipulação algébrica, a aplicação de propriedades para simplificar e, principalmente, questões envolvendo as operações com Polinômios.

Realizações do conceito de Polinômios agrupadas no panorama estrutura algébrica, mantém vínculos com tópicos específicos do próprio conteúdo, como, operações, simplificações e propriedades dos Polinômios, revelando assim, uma forte classificação entre seus textos com outros conceitos. Já em termos de combinações, essas realizações e vínculos mantêm fraca classificação entre seus textos e a Álgebra Abstrata, visto que revelam possibilidades de conexões e associações com textos mais específicos da Álgebra Abstrata. Exemplos disso, é a divisão de Polinômios utilizando o método das chaves que podemos associar com o teorema da Divisão Euclidiana, e as operações realizadas com Polinômios estritamente ligadas às propriedades básicas de Anéis.

Panorama geométrico

Esse panorama é constituído pelas realizações do conceito de Polinômios reconhecidos como expressões que representam perímetro, área ou volume de figuras e distâncias entre pontos, associados a uma figura geométrica ou desenho. Na figura 4 apresentamos exemplos de realizações identificadas nos livros didáticos analisados.

De uma chapa metálica com formato retangular foi retirada uma peça, também com formato retangular, e o restante foi dividido em três partes, como mostra o esquema.



De acordo com as medidas indicadas no esquema, podemos representar a medida da área restante da chapa metálica calculando a medida da área de cada uma das três partes e adicionando-as em seguida. Desse modo, temos:

Medida da área I
 $a \cdot a = a^2$

Medida da área II
 $a \cdot b = ab$

Medida da área III
 $b \cdot 2c = 2bc$

Medida da área restante
 $a^2 + ab + 2bc$

A expressão algébrica que representa a medida da área restante da chapa metálica é chamada **polinômio**.

(I)

- 2 O desenho a seguir representa o esboço de uma rodovia que passa pelas cidades A, B, C e D. A distância de A a B é igual à distância de B a C, e ambas podem ser representadas por x quilômetros. Sabendo que a distância de A a D é de y quilômetros, qual é a expressão algébrica que representa a distância de C a D?



Observando o esboço, podemos concluir que a distância de C a D é dada pela diferença entre as distâncias de A a D e de A a C:

$$y - 2x \rightarrow \text{A expressão algébrica } y - 2x \text{ representa a distância entre as cidades C e D.}$$

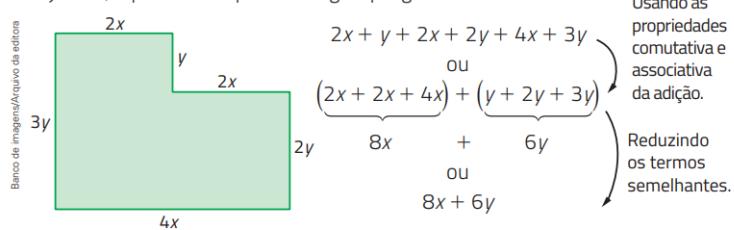
As situações que acabamos de apresentar nos mostram expressões algébricas que indicam, respectivamente, uma adição ou uma subtração de monômios, ou seja, indicam uma **adição algébrica de monômios**.

(J)

Qualquer adição algébrica de monômios denomina-se **polinômio**.

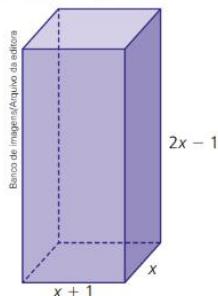
Podemos simplificar uma expressão algébrica que apresenta termos semelhantes determinando a **forma reduzida** dela.

Veja, por exemplo, como podemos indicar a medida de perímetro de um canteiro de jardim, representado por esta região poligonal.



O polinômio $8x + 6y$ obtido indica a medida de perímetro do canteiro. Ele está escrito na forma reduzida.

(K) Observe o bloco retangular representado a seguir.



Determine:

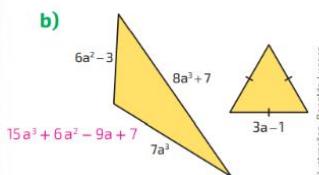
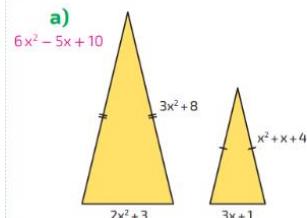
a) o polinômio que representa a medida da área total das faces desse bloco retangular. $10x^2 + 2x - 2$

b) o polinômio que representa a medida do volume desse bloco retangular. $2x^3 + x^2 - x$

(L)

45. Em cada item, escreva um polinômio reduzido que represente a diferença entre as medidas dos perímetros dos triângulos maior e menor.

a) Os triângulos do item a são isósceles e o triângulo menor do item b é equilátero.



(M)

Figura 4.

Exemplos de realizações do panorama geométrico (Chavante, 2018c, p. 159, Giovanni e Castrucci, 2018c, p. 118, Dante, 2018c, p.81, Sampaio, 2018c, p. 71, : Pataro e Balestri, 2018c, p. 86)

O exemplo (I), apresenta uma realização do conceito de Polinômios associada a área de uma chapa metálica em formato retangular. O exemplo (J) trata de uma situação hipotética que problematiza a distância entre as cidades e determina a expressão algébrica que representa tal distância. Em seguida, os autores destacam que situações desse tipo revelam expressões algébricas que expressam a adição ou subtração de monômios, ou seja, Polinômios.

O exemplo (K) explora o perímetro de uma região poligonal para determinar o procedimento algébrico de escrita de um Polinômio na sua forma reduzida. Já os exemplos (L) e (M), tratam de questões propostas pelos autores sobre Polinômios que remetem a área total, volume de um bloco retangular e a diferença entre os perímetros de triângulos. Como nos panoramas anteriores, questões desse tipo foram identificadas em todos os livros e são sugeridas nas atividades tal que os estudantes devem reconhecer que os Polinômios podem ser utilizados para representar áreas, perímetros, volumes, distâncias.

As realizações identificadas no panorama geométrico, revelam uma fraca classificação entre os textos sobre Polinômios com outros conceitos matemáticos, ou seja, estabelecem vínculos com conceitos geométricos, como: Polígonos, Perímetro, Área, Volume de figuras geométricas e Distância entre Pontos. Além disso, as realizações desse panorama identificadas nos livros didáticos selecionados, revelam uma classificação fraca entre os textos de Polinômios e a Álgebra Abstrata, na medida que associam a resolução de problemas algébricos à Geometria.

Panorama materiais manipuláveis

O panorama que nomeamos como materiais manipuláveis é composto pelas realizações do conceito de Polinômios que sugerem o uso de ferramentas digitais ou não para abordar e explorar tópicos de Polinômios. As realizações desse panorama, foram identificadas apenas em Bianchini (2018c), Pataro e Balestri (2018c) e Oliveira e Fugita (2018c). A figura 5 apresenta exemplos de realizações desse panorama.

	x	y	z	$2x + 3,5y + 10z$
1				
2				
3				
4				

Considerando o polinômio $2x + 3,5y + 10z$. A fim de calcular o valor numérico desse polinômio, dados os valores de x, de y e de z, digite no Calc os textos conforme ao lado.

	x	y	z	$2x + 3,5y + 10z$
1				0

Na célula D2, digite a fórmula indicada. Com isso, o valor numérico do polinômio, que aparecerá nessa célula, será calculado a partir dos valores de x (inserido em A2), y (inserido em B2) e z (inserido em C2).

O valor zero na célula D2 é calculado considerando o valor zero nas células A2, B2 e C2.

	x	y	z	$2x + 3,5y + 10z$
1	11	0,3	19,95	222,55

Para obter o valor numérico do polinômio para $x = 11$, $y = 0,3$ e $z = 19,95$, por exemplo, digite esses valores nas células A2, B2 e C2, respectivamente, conforme a imagem ao lado.

(N)

PASSAPORTE DIGITAL

Algeplan virtual
Nesta página da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, é possível utilizar o algeplan virtual para efetuar operações com polinômios. Disponível em: <<http://linkte.me/i23fx>>. Acesso em: 8 nov. 2018.

(O)

Monômios

1. Jogo da memória de monômios semelhantes

Objetivo: reconhecer monômios semelhantes

Material: 20 cartas com monômios

Regras

- Todas as cartas, viradas para baixo, devem ser espalhadas em uma mesa.
- Cada aluno, na sua vez, vira duas cartas.
- No caso de as cartas terem monômios semelhantes, ele pega o par para ele; do contrário, vira as cartas e deixa-as no mesmo lugar da mesa.
- O jogo continua até que acabem todas as cartas. Ganhará o jogo quem tiver o maior número de pares.
- As cartas podem ser:

$2x^2$	$7ab^2$	$3a^2b$	$-8x^3$	xy
$-4x^2$	$-14ab^2$	$-78a^2b$	$46x^3$	$9xy$
$-2,3x^3a$	a^2b^6	$(2x)^5$	b^2	x^3y^2
$3,2ax^3$	$12(ab^3)^2$	$-x^5$	$-b^2$	y^2x

(P)

Figura 5.

Exemplos de realizações do panorama materiais manipuláveis (Pataro e Balestri, 2018c, p. 293, Oliveira e Fugita, 2018c, p. 55, Bianchini, 2018c, p. L)

No exemplo (N), os autores sugerem o uso da ferramenta planilha eletrônica para explorar o valor numérico de Polinômios. As planilhas eletrônicas consistem em tabelas que permitem a organização de textos, dados numéricos e fórmulas, facilitando a realização de cálculos algébricos. O exemplo (O) trata de um *link* de acesso a um Algeplan virtual que possibilita a exploração de operações com Polinômios, através do *software* GeoGebra. O Algeplan consiste em um material didático composto por peças retangulares de seis tamanhos distintos e suas respectivas representações geométricas. Neste caso, Oliveira e Fugita (2018c) sugerem a utilização da versão virtual do Algeplan.

Outras ferramentas utilizadas nas realizações desse panorama recorrem ao uso de jogos e construção de materiais para explorar o conceito de Polinômios. No exemplo (P), Bianchini (2018c) sugere nas orientações ao professor, o uso do jogo de memória para explorar monômios semelhantes. O autor apresenta as regras e uma sugestão de cartas possíveis para construção.

As realizações do conceito de Polinômios identificadas nos livros didáticos reconhecidas como materiais manipuláveis, estabelecem uma fraca classificação, ou seja, vínculos com outros conceitos, como por exemplo: operações, área, equação, função, jogos e *softwares* matemáticos. Em termos de combinações com a Álgebra Abstrata, revelam uma forte classificação haja vista que o uso de materiais manipuláveis, sejam eles virtuais ou físicos, não fazem parte do repertório de realizações do Campo de Produção onde se localiza a Álgebra Abstrata, de forma que esses textos se mantêm isolados.

Panorama ilustrativo

Estão agrupadas nesse panorama que nomeamos como ilustrativo, as realizações do conceito de Polinômios através de tirinhas. A tirinha consiste em um gênero textual que associa imagens e humor. Comunicar o conceito de Polinômios recorrendo às tirinhas, envolve os estudantes em um ambiente descontraído, levando-os a pensar e interpretar a mensagem associando ao conceito matemático. Realizações desse panorama foram identificadas em Araribá Mais Matemática – obra coletiva (2018c) e Oliveira e Fugita (2018c). A Figura 6 apresenta exemplos de realizações desse panorama.



(Q)



(R)

Figura 6.

Exemplos de realizações do panorama ilustrativo (Araribá Mais Matemática – obra coletiva, 2018c, p. 193, Oliveira e Fugita, 2018c, p. 40)

No exemplo (Q), os autores sugerem que os estudantes reconheçam que o problema da tirinha pode ser escrito na forma de um Polinômio e que calculem o valor numérico supondo que o rato tivesse pensado no número cinco. Já no exemplo (R), o humor da tirinha consiste na ambiguidade da resposta da cruzadinha, já que “expressão algébrica formada pelo produto de um número por uma ou mais variáveis com expoentes naturais” com sete letras é um monômio, sendo que a resposta do pássaro foi um exemplo de monômio, $xyzw^2abc$.

As realizações reconhecidas no panorama ilustrativo revelam uma fraca classificação de textos sobre Polinômios com outros conceitos fora do contexto matemático, como gênero

textual e interpretação de textos. Em termos de combinações com a Álgebra Abstrata, as realizações desse tipo mantêm forte classificação, na medida que não estabelecem relações entre seus textos.

Análise transversal e discussão dos dados

Após a exposição das realizações que agrupamos em panoramas, nota-se que os livros didáticos selecionados transitam por diferentes formas de comunicar o conceito de Polinômios. Porém, destaca-se o foco em realizações reconhecidas nos panoramas situações problemas, estrutura algébrica e geométrico em todos os livros. Por outro lado, pouca ênfase as realizações reconhecidas nos panoramas generalização, materiais manipuláveis e ilustrativo.

As realizações do conceito observadas nos livros didáticos, revelam uma não limitação ao contexto do conteúdo Polinômios, na medida que estabelecem conexões com outros conceitos e áreas relacionadas, por exemplo, Economia, Física, Criptografia e Computação Gráfica. Assim como Davis e Renert (2014), analisamos essas conexões recorrendo as ênfases do EC, vínculos e combinações, como exposto no fim da apresentação de cada panorama. Tais panoramas revelam que o conceito de Polinômios tende a manter fraco isolamento, na medida que estabelece vinculações com conceitos matemáticos, como: Equação, Função, Polígonos, Números Naturais e Sequências, e outros conceitos fora do contexto matemáticos, como gênero textual e interpretação de textos, por exemplo. Além disso, identificamos que as realizações, especialmente, dos panoramas, generalização, estrutura algébrica e geométrico possibilitam estabelecer combinações com a Álgebra Abstrata, por manter tendência de uma classificação mais enfraquecida entre seus textos.

A Figura 7 apresenta uma síntese da Matemática para o Ensino do conceito de Polinômios realizado em livros didáticos da Educação Básica. Os panoramas identificados estão representados em diagramas com cantos arredondados, contendo uma breve descrição das realizações que foram agrupadas nesses panoramas. Além disso, associados a cada panorama temos outro retângulo contendo os vínculos que foram identificados em observância a força da classificação entre os textos sobre Polinômios e outros conceitos matemáticos ou não. A combinação e vínculos entre os textos agrupados em cada panorama com outros conceitos e com a Álgebra Abstrata é descrita em torno da força da classificação, e representada com o uso de linhas contínuas e tracejadas.

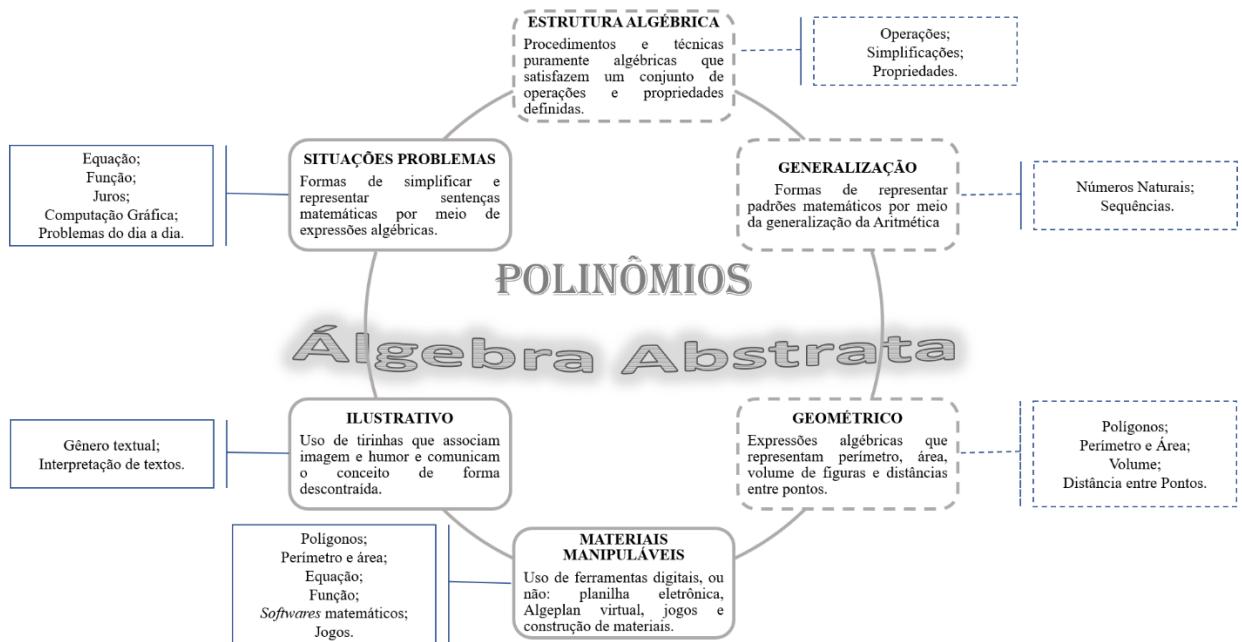


Figura 7.

Uma Matemática para o Ensino do conceito de Polinômios recontextualizado nos livros didáticos

A variabilidade dos níveis de aproximação entre os panoramas descritos e a Álgebra Abstrata é representada por linhas contínuas e tracejadas, como mostra a figura. As linhas contínuas indicam forte grau de classificação e, consequentemente, menor aproximação entre os textos desses panoramas e a Álgebra Abstrata. Já as linhas tracejadas, ao contrário, representam fraca classificação e maior aproximação entre seus textos. Sendo assim, observa-se que os panoramas situações problemas, materiais manipuláveis e ilustrativo expõem uma tendência a forte classificação em relação a Álgebra Abstrata, ou seja, os textos sobre Polinômios reconhecidos nesses panoramas, não possibilitam estabelecer conexões profundas com textos legítimos da Álgebra Abstrata. Já os panoramas, generalização, estrutura algébrica e geométrico que estão delimitados por linhas tracejadas, revelam uma classificação mais fraca, ou seja, maior aproximação entre os textos sobre Polinômios e textos da Álgebra Abstrata.

As possibilidades de compreensões mais profundas relacionadas ao conceito de Polinômios, a partir das realizações e vínculos do panorama estrutura algébrica, podem ser exemplificadas quando se apresenta a divisão de Polinômios relacionando-o a Divisão Euclidiana, onde dividir um Polinômio complexo D por outro d , não identicamente nulo, consiste em determinar Polinômios complexos, quociente q e resto r , tal que cumpram: $grau(r) < grau(d)$ e $D = dq + r$.

Características específicas do estudo de estruturas algébricas que geralmente são abordadas por meio de teoremas, definições e propriedades da Álgebra Abstrata, aparecem em realizações identificadas nos livros didáticos de forma mais simplificada e implícita entre seus tópicos. Um exemplo disso, são as propriedades e regras das operações com Polinômios obedecem que são consequências da definição de Anéis e Corpos. Essas conexões são possíveis através das sucessivas recontextualizações que os textos da Álgebra Abstrata sofrem até a sua comunicação legítima no contexto do livro didático da Educação Básica.

Considerações finais

Esse trabalho apresenta os resultados de um estudo que teve como objetivo sistematizar uma Matemática para o Ensino do conceito de Polinômios a partir de realizações presentes em livros didáticos. Com as fundamentações teóricas e metodológicas bernsteiniana e do Estudo do Conceito de Davis e Renert (2014), identificamos uma variabilidade de realizações do conceito de Polinômios em dez livros didáticos e as agrupamos em seis panoramas: generalização, linguagem algébrica, estrutura algébrica, geométrico, materiais manipuláveis e ilustrativo.

O estudo corroborou alguns resultados já apontados na literatura que trata da apresentação da Álgebra como uma generalização da Aritmética e da relação desta com a Geometria, especialmente nos panoramas Generalização e Geométrico. As realizações que compõem o panorama Situações Problemas, na tentativa de convencer os estudantes da importância da Álgebra, reforçam a ideia presente na literatura de que o estudo de Polinômios é importante para o desenvolvimento de competências algébricas.

Inferimos que a predominância de realizações do panorama Estruturas Algébricas em todos os livros analisados pode contribuir com as dificuldades relacionadas à aprendizagem desse conceito já apontadas na literatura, ao apresentá-lo como operações e propriedades estruturadas por sentenças bem sintetizadas. Como um contraponto as realizações que integram tal panorama, os livros analisados não apresentaram uma definição formal para o conceito de Polinômio, por estarem destinados aos anos finais do Ensino Fundamental.

Consideramos que a variedade de realizações do conceito de Polinômios e suas vinculações desempenham um papel importante na compreensão do conceito, visto que reafirma a aprendizagem de outros conceitos já estudados, potencializando o desenvolvimento da linguagem e do pensamento algébrico. Contudo, consideramos que o fato desse conceito ter ficado restrito aos anos finais do Ensino Fundamental demanda novas formas de abordá-lo nos

cursos de formação de professores. Tais cursos, enquanto Campo de Recontextualização Pedagógica, podem compartilhar com os professores diferentes realizações do conceito de Polinômios a fim de contribuir com o ensino e a aprendizagem. Espera-se que o presente estudo possa contribuir para que professores tenham uma visão das diferentes formas de comunicar o conceito de Polinômios, possíveis vínculos com outros conceitos e combinações com a Álgebra Abstrata.

Por fim, destacamos que a opção por analisar apenas o capítulo que tratava do conceito de Polinômios por ter sido um limitador das realizações identificadas nos livros analisados. Porém, consideramos que as realizações documentadas foram capazes de sintetizar *uma* Matemática para o ensino desse conceito que, ao não pretender ser única e nem completa, poderá ser utilizada como ponto de partida de práticas pedagógicas estabelecidas entre professores e estudantes ao abordarem o conceito de Polinômios.

Referências

- Adler, J. at al. (2005). Reflections on an emerging field: Researching Mathematics Teacher Education. *Educational Studies in Mathematics*, n. 60, p. 359 - 381.
- Arariba M. M. (2018c). *Obra Coletiva concebida, desenvolvida e produzida pela Editora Moderna*. Editores Responsáveis: Mara Regina Garcia Gay e Willian Raphael Silva. São Paulo: Moderna.
- Ball, D. L., Thamés, M. H. & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching what makes it special?. *Journal of teacher education*, 59(5), p. 389-407.
- Bernstein, B. B. (2000). *Pedagogy, symbolic control, and identity: Theory, research, critique*. Rowman & Littlefield Publishers.
- Bernstein, B. B. (2003). *Class, codes and control: the structuring of pedagogic discourse*. Routledge.
- Bianchini, E. (2018c). *Matemática Bianchini*. São Paulo: Moderna.
- Brasil. M. da. E. (2019). Secretaria de Educação Básica. *Guia de livros didáticos PNLD 2020. Matemática*. Ensino Fundamental – Anos finais. Brasília, 158 p.
- Brasil, M. (2017). Base nacional comum curricular. *Brasília-DF: MEC, Secretaria de Educação Básica*.
- Bressan, L. (2021). *Utilização do algeplan nas operações com polinômios e raízes de sobreviventes do 2º grau*. [Dissertação (Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional). Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria]. <https://repositorio.ufsm.br/bitstream/handle/1/21165>.
- Chavante, E. (2018c). *Convergências Matemática*. São Paulo: SM.
- Creswell, J. W. (2010). *Projeto de pesquisa: Métodos qualitativo, quantitativo e misto* (3^a ed.). Artmed.
- Coutinho, J. L. da E. (2015). *Matemática para o ensino do conceito de combinação simples*. 115 f. [Dissertação (Mestrado em Educação) – Programa de Pós-Graduação em

Educação, Universidade Federal da Bahia, Salvador]. <https://repositorio.ufba.br/bitstream/ri/18419>.

Coutinho, D. M. et al. (2019). *Divisão e multiplicação de polinômios com o auxílio de materiais manipuláveis e tecnologias sob o olhar da representação semiótica*. [Dissertação de Mestrado. Universidade Tecnológica Federal do Paraná]. <https://repositorio.utfpr.edu.br/jspui/handle/1/4024>.

Dante, L. R. (2018c). *Teláris Matemática*. São Paulo, SP: ática.

Davis, B., & Renert, M. (2014). *The Math Teachers Know: Profound Understanding of Emergent Mathematics*. Routledge.

Davis, B. Simmt, E. (2006). Mathematics-for-Teaching: an ongoing investigation of the Mathematics that teachers (need to) know. *Educational Studies in Mathematics*, n. 61, p. 293–319.

Dias, D. M. G. (2021). *O uso da resolução de problemas no ensino de anéis de polinômios em um curso de licenciatura em matemática*. [Dissertação, Programa de Pós-Graduação em Ensino e Processos Formativos. Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira – UNESP, Ilha Solteira]. <https://repositorio.unesp.br/items/4a55527>.

Eves, H. (2002). *Introdução à história da matemática*. 3 ed. Campinas: Editora da UNICAMP.

Gil, A. C. (2010). *Como elaborar projetos de pesquisa*. 5. ed. São Paulo: Atlas.

Giovanni, J. R., & Castrucci, B. (2018c). *A conquista da Matemática* (4^a ed). São Paulo, SP: Ftd.

Grilo, J. D. S. P., Barbosa, J. C., & Luna, A. V. A. (2016). A recontextualização de textos de disciplinas específicas da Licenciatura em Matemática para a educação básica. *Acta Scientiae*, 18(2).

Ibrahim, S. A. (2015). *A apropriação dos significados de polinômios: um estudo na perspectiva da teoria histórico-cultural*. [Dissertação, Programa de Pós-Graduação em Educação da Universidade de Uberaba]. <https://repositorio.uniube.br/handle/123456789>.

Ibrahim, S. A., & Resende, M. R. (2018). Significados de polinômios: uma via de apropriação por alunos do ensino fundamental/Meanings of polynomials: a route od appropriation by Elementary School students. *Educação em Foco*, 21(35), 97-117.

Lautenschlager, E., & Ribeiro, A. J. (2017). Formação de professores de matemática e o ensino de polinômios Mathematics teacher education and teaching of polynomials. *Educação Matemática Pesquisa: Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática*, 19(2).

Lima, R. F., & de Oliveira, A. M. P. (2019). Uma análise bernsteniana sobre as regras discursivas expressas em um material curricular educativo An bernstenian analysis on the discursive rules expressed in an curricular educational materials. *Educação Matemática Pesquisa: Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática*, 21(2).

Massarioli, F. F. *Um estudo sobre polinômios aplicado a reticulados e à resolução de problemas no Ensino Médio*. Dissertação (Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional). Instituto de Geociências e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2022. <https://repositorioslatinoamericanos.uchile.cl/handle/2250>.

Menduni-Bortoloti, R. A. (2016). *Um estudo sobre a Matemática para o Ensino de Proporcionalidade*. Tese (Doutorado em Educação). Programa de Pós-Graduação em

Educação, Universidade Federal da Bahia, Salvador.
<http://repositorio.ufba.br/ri/handle/ri/19735>.

- Moura, L. & De Oliveira S., V. (2021). Relações da álgebra, aritmética e geometria: Problema 24 do Papiro de Rhind, proposição 4 do livro II dos Elementos de Euclides, regra de sinais “menos vezes menos dá mais” e método de Al-Khwarizmi para equações do segundo grau. *Revista Brasileira de História, Educação e Matemática (HIPÁTIA)*, 6(2), p. 464-475,
- Oliveira, C. N. C. de.; Fugita, F. (2018c). *Geração Alpha Matemática*. São Paulo: Edições SM,
- Pataro, P. M.; Balestri, R. (2018c). *Matemática Essencial*. São Paulo: Scipione.
- Pereira, P. H. de. A. (2020). *Polinômios: teoria e aplicações imagens simétricas através de interpolação de lagrange*. [Dissertação, Mestrado Profissional em Matemática, Universidade Federal do Tocantins, Palmas]. <https://repositorio.uft.edu.br/bitstream/11612/2369>.
- Prado, A. D. S., Oliveira, A. M. P. d., & Barbosa, J. C. (2020). A recontextualização de textos na produção de um material curricular para os jogos de linguagem da matemática escolarThe recontextualization of texts in the production of a curricular material for the language games of school mathematics. *Educação Matemática Pesquisa: Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática*, 22(1).
- Rangel, L., Giraldo, V., & Maculan Filho, N. (2015). Conhecimento de matemática para o ensino: um estudo colaborativo sobre números racionais. *Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática*, 8(2).
- Ribeiro, M. (2020). Discutindo o conhecimento especializado do formador de professores de e que ensinam matemática-um exemplo focando tarefas para a formação. *Formação de Professores que ensinam matemática: processos, desafios e articulações com a educação básica*. Brasília: SBEM, p. 241-263.
- Sampaio, F. A. (2018c). *Trilhas da Matemática*. São Paulo: Saraiva.
- Santos, G. L. D., & Barbosa, J. C. (2017). Um modelo teórico de Matemática para o Ensino do Conceito de Função a partir de realizações em livros didáticos A theoretical model of Mathematics for Teaching of the concept of function from realizations in textbooks. *Educação Matemática Pesquisa: Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática*, 19(2).
- Santos, G. L. D. (2017). *Um modelo teórico de Matemática para o ensino do conceito de função*. 115 f. [Tese Doutorado – Programa de Pós-Graduação em Ensino, Filosofia e História das Ciências, Universidade Federal da Bahia, Salvador]. <https://repositorio.ufba.br/bitstream/ri/22243>.
- Santos, S. A. dos. (2021). *Polinômios em uma variável: propriedades e operações*. [Dissertação (Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional). Instituto de Geociências e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista, Rio Claro]. <https://repositorio.unesp.br/server/api/core/bitstreams/3b629915>.
- Silva, L. M. da. *Uma abordagem geométrica para operações básicas dos polinômios de 1º, 2º e 3º graus*. (2021). [Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Centro de Ciências Exatas e da Terra, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal]. <https://repositorio.ufrn.br/bitstream/123456789/44848>.
- Silveira, E. (2018d). *Matemática Compreensão e Prática*. São Paulo: Moderna.

- Shulman, Lee. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. *Harvard educational review*, 57(1), p. 1-23.
- Sousa, R. J. (2020). *A álgebra dos polinômios*. 84 f. [Dissertação (Mestrado em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Federal de Goiás, Goiânia]. <https://repositorio.bc.ufg.br/tede/items/462b351>.
- Souza, J. R. de; Garcia, J. da. S. R. (2016). *Contato Matemática*, 3º. ano. Manual do professor. Coleção: Contato Matemática 1. ed. São Paulo: FTD.
- Souza, J. R. d. (2018d). *Matemática Realidade & Tecnologia*. São Paulo: FTD.